Exam/Tentamen 1

December 11, 2009

You have 2hrs to solve the problems. All questions have equal weight. Good luck!

Exercise 1 Consider the following modal frame: $F = (\{w, x, y, z\}, \{(w, x), (w, y), (x, z), (y, z)\})$. For which states can you give a modal formula that is true uniquely at that state (i.e., true at that state and at no other)? For each such state, give such a formula. Why is it impossible for some states? Moreover, give a valuation on the frame such that the following condition is satisfied: $w \models \Box(p \wedge q)$ and $x \models \Box p \wedge \neg\Box q$.

Exercise 2 Show that (a) the formula $(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \implies \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ is not K-valid; (b) the formula $\Box\varphi \implies \Diamond\varphi$ is T-valid, where the following definition is given $\Diamond\alpha \iff \neg\Box\neg\alpha$.

Exercise 3 Compute the standard first-order translation of the following modal formula. Use only two variables.

$$\Diamond\Box p \implies p$$

Exercise 4 We say $F = (W, R)$ is dense if R is a dense relation (for all $x, y, z \in W$ if xRy, then there is a $z \in W$ such that xRz and zRy). Prove that F is dense iff $F \models \Box\Box\varphi \implies \Box\varphi$.

Exercise 5 Consider the difference operator, D, defined in the following way:

$$M, w \models D(\varphi) \text{ iff there is a } u \text{ such that } u \neq w \text{ and } M, u \models \varphi.$$

Prove that D is not definable in the basic modal language, i.e. there is no modal formula expressing the meaning of D.

Je hebt 2 uur voor dit tentamen. Alle vragen tellen even zwaar mee. Veel succes!

Oefening 1 Beschouw het volgende modale frame: $F = (\{w, x, y, z\}, \{(w, x), (w, y), (x, z), (y, z)\})$. Voor welke werelden kun je een modale formule geven die in dit model alleen in die wereld waar is? Geef voor elk van dergelijke werelden zo'n formule. Waarom is dit onmogelijk voor een aantal werelden? Geef ook een valuatie op dit frame zodat: $w \models \Box(p \wedge q)$ and $x \models \Box p \wedge \neg\Box q$.

Oefening 2 Laat zien dat (a) de formule $(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \implies \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ niet K-geldig is; (b) de formule $\Box\varphi \implies \Diamond\varphi$ T-geldig is, waarbij de volgende definitie is gegeven $\Diamond\alpha \iff \neg\Box\neg\alpha$.

Oefening 3 Bereken de standaard eerste-ordevertaling (standard first-order translation) van de volgende modale formule. Gebruik slechts twee variabelen.

$$\Diamond\Box p \implies p$$

Oefening 4 We noemen een frame $F = (W, R)$ dicht als R een dichte relatie is (voor alle $x, y, z \in W$ als xRy, dan bestaat er een $z \in W$ zodat xRz en zRy). Bewijs dat F dicht is dan en slechts dan als $F \models \Box\Box\varphi \implies \Box\varphi$.

Oefening 5 Beschouw de volgende operator D, gedefiniëerd als volgt:

$$M, w \models D(\varphi) \text{ dan en slechts dan als er een } u \text{ is zodat } u \neq w \text{ en } M, u \models \varphi.$$

Bewijs dat D niet definiëerbaar is in de basis modale logica (basic modal logic), d.w.z. er is geen modale formule die de betekenis van D uitdrukt.